VOORBEREIDING OP HET TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA

GEORG MUNTINGH

1. Inleiding

Het vak valt uiteen in een praktisch en een theoretisch deel. Het praktische deel bestaat uit een heleboel technieken om van alles en nog wat uit te rekenen. In de samenvatting hieronder heb ik deze technieken kort als stappenplan opgeschreven. Omdat lineaire algebra zoveel toepassingen heeft is het erg nuttig om deze algoritmes te kennen. Alleen door ze herhaaldelijk toe te passen kun je je deze technieken eigen maken.

De andere kant van het vak is het theoretische deel. Hiervoor is het belangrijk dat je de definities en belangrijke stellingen kent. Bewijzen is geen rechttoe rechtaan proces, maar is wel degelijk iets dat je kunt oefenen. Vaak moet je het een tijdje laten bezinken voordat je er handigheid in krijgt. Een manier om dit te oefenen is natuurlijk zelf bewijsjes proberen op te stellen (zoals je als het goed is op het huiswerk hebt gedaan). Het uit je hoofd leren van bewijsjes en deze af en toe voor de geest proberen te halen is echter ook een goede oefening.

Je kunt de volgende dingen doen om je voor te bereiden op het tentamen.

- Leer de definities en belangrijke stellingen die behandeld zijn uit je hoofd. Dat is misschien veel werk, maar het is een noodzakelijk onderdeel van het vak. Niet alle stellingen zijn even belangrijk. De definities zijn allemaal belangrijk (ze vormen de basis van het vak).
- Bekijk de samenvatting onderaan dit document en in het bijzonder of je in staat bent de gegeven algoritmes uit te voeren. Oefen hier net zo lang op tot je het gevoel hebt dat je alle mogelijke opgaven van dat type kunt maken.
- Bekijk de werkcollege-, huiswerk- en toetsopgaven en zie of je nu in staat bent ze te maken. In het bijzonder kunnen de TRUE/FALSE opgaven je een idee geven hoe goed je de stof begrepen hebt.
- Op `http://onderwijscatalogus.fwn.rug.nl/?vakid=1196` zijn de eindtermen van het vak terug te vinden. Controleer of je hieraan voldoet.
- De laatste stap is om te zien of je in staat bent oude tentamens te maken. Zie daarvoor de website `http://www.fmf.nl/~toetscie/tentamens/`.

2. Bewijzen

In een heleboel bewijsjes moet je een *willekeurig element* kiezen. Hiermee wordt een element bedoeld dat opgeschreven is in een algemene vorm zodat het ieder element kan zijn.

Wat je vaak ziet is dat studenten bij een bewijs (of bij het uitrekenen van een som) wel alle stappen op papier zetten, maar dat de verbanden daartussen niet worden opgeschreven. Deze verbanden zijn net zo belangrijk als de stappen zelf! In een bewijs moeten de afzonderlijke zinnen aan elkaar gerelateerd worden door woorden als 'dus', 'daarom', 'vanwege', 'daaruit volgt', 'is equivalent aan' etc. Deze zinnen moeten strikt gezien *uitspraken* zijn: zinnen waarvan je 'logisch' gezien kunt zeggen dat ze waar of niet waar zijn. Voorbeelden van uitspraken zijn 'a is een element van A', 'de vergelijking $f(x) = 0$ heeft geen oplossingen' en 'uitspraak 1 impliceert uitspraak 2'. De zinnen 'tegenspraak!', '$(a+b)/c$ omschrijven' en 'wat een flauwekul' zijn daarentegen geen uitspraken. Vooral als je je bewijs in symbolen opschrijft wordt dit moeilijk te volgen wanneer je dit niet in termen van uitspraken formuleert.

Er zijn truukjes die je kunnen helpen met bewijzen. Het simpelweg opschrijven van wat er gegeven is en wat je moet bewijzen helpt je een begin te maken. Op het moment dat je formeel opschrijft wat je weet en wat je moet bewijzen wordt dit ook voor jezelf veel duidelijker. Het is de eerste stap die je moet uitvoeren om inzicht te krijgen in het probleem. Dat is dezelfde reden waarom je op de middelbare school bij natuurkunde leert een plaatje van een probleem te maken, voordat je met het oplossen begint.

Verder moet je dit alles netjes kunnen opschrijven. Als je bijvoorbeeld moet bewijzen dat twee verzamelingen gelijk zijn, kun je dat opschrijven als:

Gegeven: ...
Te bewijzen: $A = B$.
Bewijs:

'$\subseteq$': Neem een willekeurige $a \in A$.
...
Hieruit volgt dat $a \in B$. a was willekeurig, dus $A \subseteq B$.
'$\supseteq$': Neem een willekeurige $b \in B$.
...
Hieruit volgt dat $b \in A$. b was willekeurig, dus $B \subseteq A$.
Aangezien $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ geldt dat $A = B$. Dit is wat er bewezen moest worden.

Dit lijkt misschien omslachtig, maar is in het algemeen voor de lezer veel makkelijker te volgen dan een verhaal van de vorm $A = \cdots = B$ dat de twee verzamelingen aan elkaar praat. Eenzelfde bewijsvorm kun je gebruiken om te laten zien dat $\langle$uitspraak 1$\rangle \iff \langle$uitspraak 2$\rangle$.

Eindig je bewijs met een conclusie.

3. Samenvatting

Hieronder volgt, per hoofdstuk, een samenvatting van de technieken die op het werkcollege zijn behandeld. Verder stip ik aan het begin van elk hoofdstuk een aantal belangrijke punten van dat hoofdstuk aan.

3.1. Vectorruimtes.

In dit hoofdstuk wordt vooral de vaardigheid bijgebracht van het werken met de abstracte vectorruimte-structuur. Het is belangrijk dat je *de acht axioma's van een vectorruimte weet.* Deze zijn makkelijker te onthouden als je bedenkt dat de structuur uiteenvalt in vier axioma's die de optel-structuur vastleggen, twee axioma's die de scalaire vermenigvuldig-structuur vastleggen en twee axioma's die de interactie tussen deze twee structuren vastleggen. Verder moet je *weten welke drie dingen je moet bewijzen om aan te tonen dat $W \subset V$ een deelruimte is.*

3.1.1. *Bepalen of een verzameling vectoren linear afhankelijk is.*

In een vectorruimte van dimensie n zijn meer dan n vectoren natuurlijk altijd lineair afhankelijk. Je kunt ze uitschrijven op een basis, opschrijven als kolomvectoren $(x_1, \ldots, x_n)^T$ en ze naast elkaar in een matrix A zetten.

- Bepaal de rang van deze matrix (zie beneden). Heeft de matrix volle rang (dus de rang gelijk aan het aantal vectoren) dan zijn de vectoren lineair onafhankelijk, anders lineair afhankelijk.

- Als je precies n vectoren hebt is A vierkant en kun je de determinant uitrekenen. Is deze niet nul, dan zijn de vectoren lineair onafhankelijk, anders lineair afhankelijk.

3.1.2. *Bepalen of een verzameling vectoren S een basis van een vectorruimte V is.* Hiervoor moet je twee dingen laten zien.

- Zijn de vectoren lineair onafhankelijk (zie hierboven)?
- Spannen de vectoren de hele ruimte op? Dit kan je weer op verschillende manieren nagaan. Bijvoorbeeld als volgt.
  - Neem een willekeurige vector $v \in V$ en laat zien dat deze vector een lineaire combinatie van elementen van S is (om te laten zien dat S de hele ruimte opspant), of kies een specifieke vector $v \in V$ en laat zien dat dit geen lineaire combinatie van elementen van S kan zijn (om te laten zien dat S niet de hele ruimte opspant).
  - Als de dimensie van de ruimte $n < \infty$ is en S bestaat uit meer dan n lineair onafhankelijke vectoren, dan spant S automatisch V op. Bestaat S echter uit minder dan n vectoren dan kan het opspansel van S nooit de hele ruimte zijn.

3.2. **Lineaire transformaties en matrices.** De belangrijkste stelling uit dit hoofdstuk is *de dimensiestelling* (stelling 2.3). Verder is het belangrijk dat *een afbeelding $T : V \to W$ met $\dim(V) = \dim(W)$ injectief is d.e.s.d.a. hij surjectief is* (stelling 2.5). Dit scheelt je soms de helft van het werk. Je moet het idee hebben gekregen dat *een hoop problemen makkelijker worden als je ze uitschrijft op een basis.* Het is vaak makkelijker om met kolomvectoren en matrices te werken in plaats van met (abstracte) vectoren en afbeeldingen.

3.2.1. *Bepalen of een afbeelding $T : V \to W$ tussen twee vectorruimtes over een lichaam $\mathbb{F}$ lineair is.* Dit komt bijna altijd neer op het rechtstreeks toepassen van de definitie. Dus neem willekeurige $\lambda \in \mathbb{F}$ en $x, y \in V$, bereken $T(\lambda x + y)$ en $\lambda T(x) + T(y)$ en laat zien dat deze gelijk zijn.

3.2.2. *Bepalen of een lineaire afbeelding $T : V \to W$ injectief is.*

- Per definitie is een afbeelding T injectief precies dan als $T(x) = T(y) \implies x = y$. Je kunt echter aantonen dat een lineaire afbeelding T injectief is d.e.s.d.a. $N(T) = \{0\}$. Om te laten zien dat T injectief is, kun je een willekeurige $v \in V$ nemen, $T(v)$ bepalen en deze nul stellen. Als je hieruit kunt afleiden dat dan $v = 0$ dan ben je klaar. Om te laten zien dat T niet injectief is kun je op deze manier juist een niet-nul element in $N(T)$ proberen te vinden.
- Als $\dim(V) = \dim(W)$ en je weet (of kunt makkelijk laten zien) dat T surjectief is, dan volgt daaruit dat T injectief is (dit is stelling 2.5).

3.2.3. *Bepalen of een lineaire afbeelding $T : V \to W$ surjectief is.*

- Je kunt rechtstreeks de definitie toepassen: kun je voor een willekeurige $w \in W$ een $v \in V$ vinden zodanig dat $w = T(v)$?
- Als $\dim(V) < \dim(W) \leq \infty$ dan volgt (uit de lineairiteit van T) dat T niet surjectief kan zijn (dit volgt uit stelling 2.2).
- Als $\dim(V) = \dim(W)$ en je weet (of kunt makkelijk laten zien) dat T injectief is, dan volgt daaruit dat T surjectief is (dit is stelling 2.5).

3.2.4. *Bepalen of een lineaire afbeelding inverteerbaar is.* Er zijn weer verschillende manieren om dit te doen.

- Per definitie is een afbeelding inverteerbaar precies dan als er een inverse bestaat. Je kunt dus zo'n inverse proberen te vinden.
- Voor eindigdimensionale ruimtes kun je bases voor V en W kiezen en de bijbehorende matrix van T opstellen. De afbeelding is inverteerbaar d.e.s.d.a. de matrix inverteerbaar is. Voor dit laatste heb je algoritmes geleerd (zie beneden).
- Soms kun je aan de dimensies zien dat een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen eindigdimensionale ruimtes niet inverteerbaar is. Als $\dim(V) \neq \dim(W)$ dan is T niet inverteerbaar.
- Een afbeelding is inverteerbaar d.e.s.d.a. hij bijectief (dus injectief en surjectief) is. Test of de afbeelding injectief en surjectief is. Als $\dim(V) = \dim(W)$ dan hoef je zelfs maar één van beide te testen (dit is stelling 2.5).

3.2.5. *Een vector x uitschrijven op een basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

(1) Stel de vergelijking $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ op. Dit vormt een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden.
(2) Los dit stelsel op.

3.2.6. *De matrix $[T]_\beta^\gamma$ van een lineaire transformatie $T : V \to W$ opstellen voor zekere bases $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ en $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$.*

(1) Bereken de beelden $T(v_i)$ van de basisvectoren van β en schrijf deze uit op de basis γ (schrijf ze als lineaire combinatie van de elementen van γ).
(2) Vorm kolomvectoren u_i van de coëfficiënten van $T(v_i)$ op de basis γ.
(3) Vorm de matrix

$$[T]_\beta^\gamma := \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \ldots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

3.2.7. *Bepalen of een afbeelding $T : V \to W$ een isomorfisme is.* Hiervoor moet je twee dingen nagaan.

(1) Bepaal of T een lineaire afbeelding is. Dit komt meestal neer op het rechtstreeks toepassen van de definitie.
(2) Bepaal of T of inverteerbaar is (zie hierboven).

3.2.8. *Bepalen of twee vectorruimtes V en W isomorf zijn.*

- Voor eindigdimensionale vectorruimtes V en W geldt dat ze isomorf zijn d.e.s.d.a. hun dimensies gelijk zijn. Dus in dit geval hoef je slechts de dimensies van de vectorruimtes te bepalen om te kijken of ze isomorf zijn.
- In het algemeen moet je proberen een isomorfisme $T : V \to W$ (of een isomorfisme $U : W \to V$) te vinden.

3.2.9. *De coördinatentransformatie matrix opstellen.* Voor twee bases $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $\beta' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$, is de *coördinatentransformatie matrix $Q = \{Q_{ij}\}_{ij}$ die β'-coördinaten omzet in β-coördinaten* de matrix die voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sum_{i=1}^n Q_{i1} x_i, \\ &\vdots \\ x'_n &= \sum_{i=1}^n Q_{in} x_i. \end{aligned}$$

Elke regel is een vergelijking van vectoren en staat dus eigenlijk voor n vergelijkingen. In totaal zijn er daarom n stelsels van n vergelijkingen in n onbekenden: voor regel j de Q_{1j} tot en met Q_{nj}. Het opstellen van de coördinatentransformatie matrix komt daarom neer op het oplossen van een aantal stelsels van vergelijkingen. Hiervoor heb je een algoritme geleerd (zie beneden). Het opstellen van de coördinatentransformatie matrix is daarom iets dat je kunt oefenen en gaat als volgt.

(1) Begin bij de eerste regel.
(2) Stel bij deze regel het stelsel van n vergelijkingen op dat bij deze bases hoort.
(3) Los dit stelsel op.
(4) Ga (tenzij je bij de laatste regel bent) door naar de volgende regel en ga naar stap (2).

3.2.10. *De matrix $[T]_\beta$ van een lineaire afbeelding $T : V \to V$ omschrijven naar een andere basis β'.* Hoe je dit moet doen volgt direct uit stelling 2.23.

(1) Bereken de coördinatentransformatie matrix Q die β'-coördinaten omzet in β-coördinaten.
(2) Bereken $[T]_{\beta'} := Q^{-1}[T]_\beta Q$.

3.3. **Elementaire matrix operaties en stelsels lineaire vergelijkingen.** Het is belangrijk om te weten wat *de drie elementaire rij- en kolomoperaties* zijn, omdat je deze vaak zult toepassen. Ook is het belangrijk om de definitie van *gereduceerde echelon-vorm* te kennen. Een ezelsbruggetje hierbij is *'Leaders like to be number one, are lonely and want other leaders above to their left'*. Verder moet je weten *wat de rang van een matrix A verteld over de oplossingen van $Ax = b$* en *wat het verband is tussen een particuliere oplossing, de homogene oplossing en de algemene oplossing*.

3.3.1. *Door middel van elementaire rij- en kolomoperaties een matrix in gereduceerde echelon-vorm brengen.* Dit is een belangrijke vaardigheid die je gebruikt bij het bepalen van de rang, het uitrekenen van een inverse, het oplossen van een stelsel vergelijkingen etc. Dit moet je dus goed kunnen! Er is een algoritme waarmee je *altijd* op de echelon-vorm uitkomt (dus in plaats van het lukraak vegen wanneer dat je gerade voorkomt). Dat algoritme is als volgt:

(1) Verwissel in de meest linkse kolom die niet overal nul is, de rijen zodanig dat je een niet-nul element bovenaan krijgt. Dit noem je het *pivot-element*.
(2) Herschaal de rij met het pivot-element zodanig dat het pivot-element één wordt.
(3) Veeg alle rijen onder deze rij schoon.
(4) Herhaal stappen (1)-(3) op de matrix die overblijft als je de rij en kolom van dit pivot-element uit de matrix verwijdert. De matrix is nu in (een) echelon-vorm.
(5) Veeg nu, rechts beginnend, de rijen boven elk pivot-element schoon. De matrix is nu in gereduceerde echelon-vorm.

3.3.2. *De rang van een matrix bepalen door middel van rij- en kolomoperaties.* De rang van een matrix verandert niet onder zulke operaties. Eenmaal in echelon-vorm is de rang gemakkelijk af te lezen. Natuurlijk kan het in de meeste gevallen veel sneller zonder hem in echelon-vorm te brengen, maar *op echelon-vorm brengen werkt altijd*.

3.3.3. *Bepalen of een (vierkante) matrix inverteerbaar is.* Alleen vierkante matrices hebben echte inverses. Er zijn verschillende manieren om te testen of een matrix inverteerbaar is.

- Bereken de determinant van A. Is deze ongelijk aan nul, dan bestaat de inverse en anders niet.
- Bepaal de rang van de matrix. Heeft de matrix volle rang (dus heeft een $n \times n$ matrix rang n) dan bestaat de inverse en anders niet.

3.3.4. *De inverse van een matrix A uitrekenen.* Hier is ook weer gewoon een algoritme voor

(1) Stel de aangevulde matrix $(A|I)$ op.
(2) Breng deze matrix in echelon-vorm. Heeft de linkerhelft niet volle rang, dan is A niet inverteerbaar (STOP) en anders wel.
(3) Breng deze matrix in gereduceerde echelon-vorm. De matrix die rechts staat is A^{-1}.

3.3.5. *Een stelsel van vergelijkingen $Ax = b$ oplossen.*

(1) Stel de aangevulde matrix $(A|b)$ op.
(2) Breng deze matrix in gereduceerde echelon-vorm.
(3) Aan deze echelon-vorm kun je zien of het stelsel oplossingen heeft. Als er een rij voorkomt die overal nul is met uitzondering van het meest rechtse element, dan heeft het stelsel geen oplossingen (STOP) en anders wel.
(4) Verdeel de variabelen x_i in twee verzamelingen: de verzameling S_1 van variabelen die in de vergelijkingen van de gereduceerde echelon-vorm helemaal links staan en de verzameling S_2 van alle anderen. Voor de echelon-vorm
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right]$$
geldt bijvoorbeeld dat $S_1 = \{x_1, x_2, x_4\}$ en $S_2 = \{x_3, x_5\}$.
(5) Kies elke variabele x_i in S_2 willekeurig (noem ze bijvoorbeeld $t_1, \ldots, t_k$) en druk de variabelen van S_1 uit in termen van de variabelen van S_2.
(6) Schrijf de algemene oplossing op in termen van deze willekeurig gekozen t_i.

3.4. **Determinanten.** Leer de *negen eigenschappen van de determinant* van §4.4 uit je hoofd. Sommige regels zijn makkelijker te onthouden als je bedenkt waarom ze gelden, dus probeer dit te beredeneren. Bijvoorbeeld regel (4) volgt als je de matrix, inductief, langs zijn eerste kolom ontwikkeld. Als je deze regels kent kun je heel snel determinanten uitrekenen. Een goede manier om ze te leren kennen is ze te gebruiken tijdens het oefenen met het uitrekenen van determinanten.

3.4.1. *Determinanten uitrekenen via rij- of kolomontwikkeling.* Vergeet de plus- en mintekens niet!

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

3.5. **Diagonalisatie.** Het *testen op diagonaliseerbaarheid* en het *uitrekenen van een diagonaalvorm* is een rechttoe rechtaan proces. Omdat het uit zoveel stappen bestaat lijkt het misschien moeilijker dan het is. Door veel te oefenen kun je je dit eigen maken.

3.5.1. *Berekenen van het karakteristieke polynoom van een matrix A.* Het karakteristieke polynoom $P(\lambda)$ van een matrix A is gedefinieerd als

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

Het uitrekenen van het karakteristieke polynoom komt dus neer op het uitrekenen van een determinant.

3.5.2. *Berekenen van de eigenwaarden van een matrix A.* De eigenwaarden van een matrix A zijn per definitie de nulpunten van het karakteristieke polynoom van A.

(1) Bereken het karakteristieke polynoom.
(2) Vind de nulpunten.

Als je een derdegraadspolynoom hebt waarvan je een nulpunt bij $\lambda = a$ meteen ziet, dan kun je $\lambda - a$ uit het polynoom delen door middel van een staartdeling.

3.5.3. *Berekenen van de algebraïsche multipliciteit m_i van een eigenwaarde λ_i van een matrix A.* Dit is het aantal keer dat de factor $(\lambda - \lambda_i)$ voorkomt in het karakteristieke polynoom en kun je in één keer aflezen nadat je het karakteristieke polynoom in lineaire factoren ontbonden hebt.

3.5.4. *Berekenen van de meetkundige multipliciteit d_i van een eigenwaarde λ_i van een matrix A.* Dit is per definitie de dimensie van de eigenruimte die bij deze eigenwaarde hoort.

- Je kunt direct de definitie toepassen: eerst de bijbehorende eigenruimte uitrekenen (zie beneden) en daar de dimensie van bepalen.
- Een snelle manier is de volgende. Uit de dimensiestelling volgt dat

  $$d_i := \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(N(L_{A-\lambda_i I})) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda_i I).$$

  Het uitrekenen van de meetkundige multipliciteit komt daarom neer op het uitrekenen van de rang van een matrix.

3.5.5. *Berekenen van de eigenruimte E_{λ_i} van een eigenwaarde λ_i.* De eigenruimte E_{λ_i} van een eigenwaarde λ_i is gedefinieerd als

$$E_{\lambda_i} := N(L_{A-\lambda_i I}),$$

de verzameling van alle vectoren die na vermenigvuldiging met $A - \lambda_i I$ nul worden. E_{λ_i} is de oplossingsverzameling van

$$(A - \lambda_i I)x = 0.$$

Het vinden van de eigenruimte komt daarom neer op het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.

3.5.6. *Test voor diagonaliseerbaarheid van een matrix A.* Gegeven een $n \times n$-matrix A over een lichaam $\mathbb{F}$ (bijna altijd $\mathbb{R}$).

(1) Bereken het karakteristieke polynoom van A.
(2) Kijk of dit polynoom splijt (uiteenvalt in lineaire factoren over $\mathbb{F}$). Zo niet, dan is A niet diagonaliseerbaar. Zo wel, ga verder naar stap (3).
(3) Bepaal de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ van A.
(4) Bepaal voor elke eigenwaarde λ_i de bijbehorende algebraische multipliciteit m_i.
(5) Bepaal voor elke eigenwaarde λ_i de bijbehorende meetkundige multipliciteit d_i.
(6) Test of $m_i = d_i$ voor $i = 1, \ldots, k$. Zo niet, dan is A niet diagonaliseerbaar en anders wel.

3.5.7. *Het diagonaliseren van een matrix A.* Het doel is een diagonaalmatrix D en een matrix Q te vinden zodanig dat $A = QDQ^{-1}$.

(1) Test of de matrix diagonaliseerbaar is. Zo niet, STOP. Zo wel, ga door naar stap (2).

Bij stap (1) vind je eigenwaardes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ met bijbehorende multipliciteiten m_1, $\ldots, m_k$.

(2) Bereken voor elke eigenwaarde λ_i de bijbehorende eigenruimte E_{λ_i}.
(3) Kies van elke eigenruimte E_{λ_i} een basis $\{e^1_{\lambda_i}, \ldots, e^{m_i}_{\lambda_i}\}$.
(4) Stel de diagonaalmatrix D en de coördinatentransformatie matrix Q op.

$$D := \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{array}\right],$$

$$Q := \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | \\ e^1_{\lambda_1} & \cdots & e^{m_1}_{\lambda_1} & \cdots & e^1_{\lambda_k} & \cdots & e^{m_k}_{\lambda_k} \\ | & \cdots & | & \cdots & | & \cdots & | \end{array}\right].$$

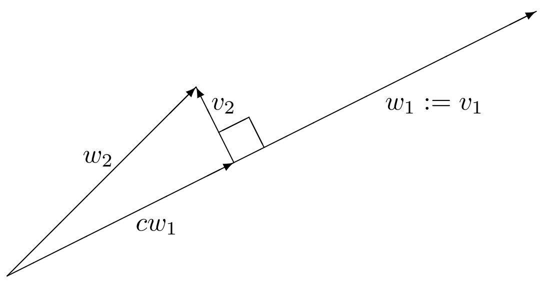
Merk op dat de volgorde van de eigenwaardes in de diagonaalmatrix en de eigenvectoren in de coördinatentransformatie matrix overeenkomen. *Haal deze volgorde niet door elkaar.*

3.6. **Inproductruimtes.** Het is belangrijk om de *definitie van een inproductruimte* en de *regels die voor een inproduct gelden* te kennen. De *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz* $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ en de *driehoeksongelijkheid* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ zijn twee belangrijke ongelijkheden die je in vervolgvakken zeker weer zult tegenkomen.

3.6.1. *Gram-Schmidt orthogonalisatie.* Met Gram-Schmidt orthogonalisatie kun je bij een verzameling $S := \{w_1, \ldots, w_n\}$ van lineair onafhankelijke vectoren een nieuwe orthogonale verzameling $S' := \{v_1, \ldots, v_n\}$ van vectoren vinden zodanig dat $\text{span } S = \text{span } S'$. De algemene formule is

$$v_k := w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j\rangle}{||v_j||^2} v_j, \qquad \text{voor } j = 1, \ldots, n.$$

Deze formule is misschien moeilijk om te onthouden. Makkelijker is het om het onderstaande plaatje te onthouden met het daarbij horende bewijs.



Probeer, zonder boek, een aantal keer dit bewijs op te schrijven of je voor de geest te halen. Dan kun je het op het tentamen ook.